Chapitre 1 : Comprendre le trafic routier

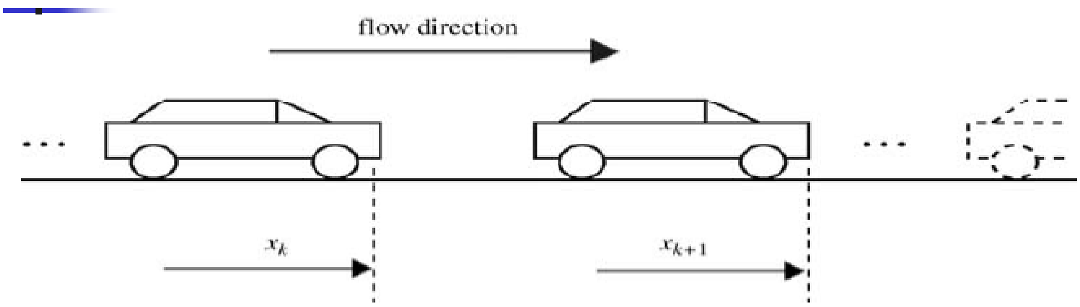
I.1 Introduction

Le trafic routier est un phénomène complexe d'une part en raison du nombre élevé d'acteurs qui y participent, d'autre part à cause du caractère très maillé du réseau sur lequel il se déroule.

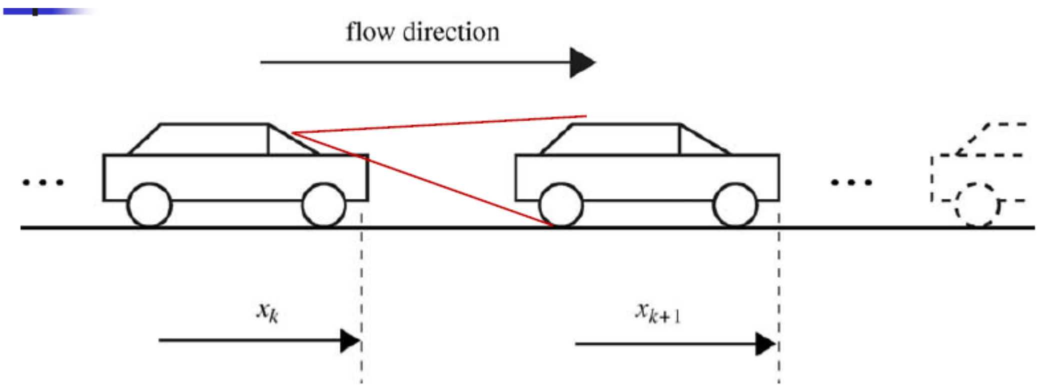
Le phénomène le plus marquant dans le trafic routier est la congestion. Pour comprendre la congestion, il faut garder toujours à l'esprit que c'est un phénomène qui survient lorsque la demande (le nombre de véhicules qui cherchent à utiliser une infrastructure donnée) est supérieure à la capacité de cette infrastructure.

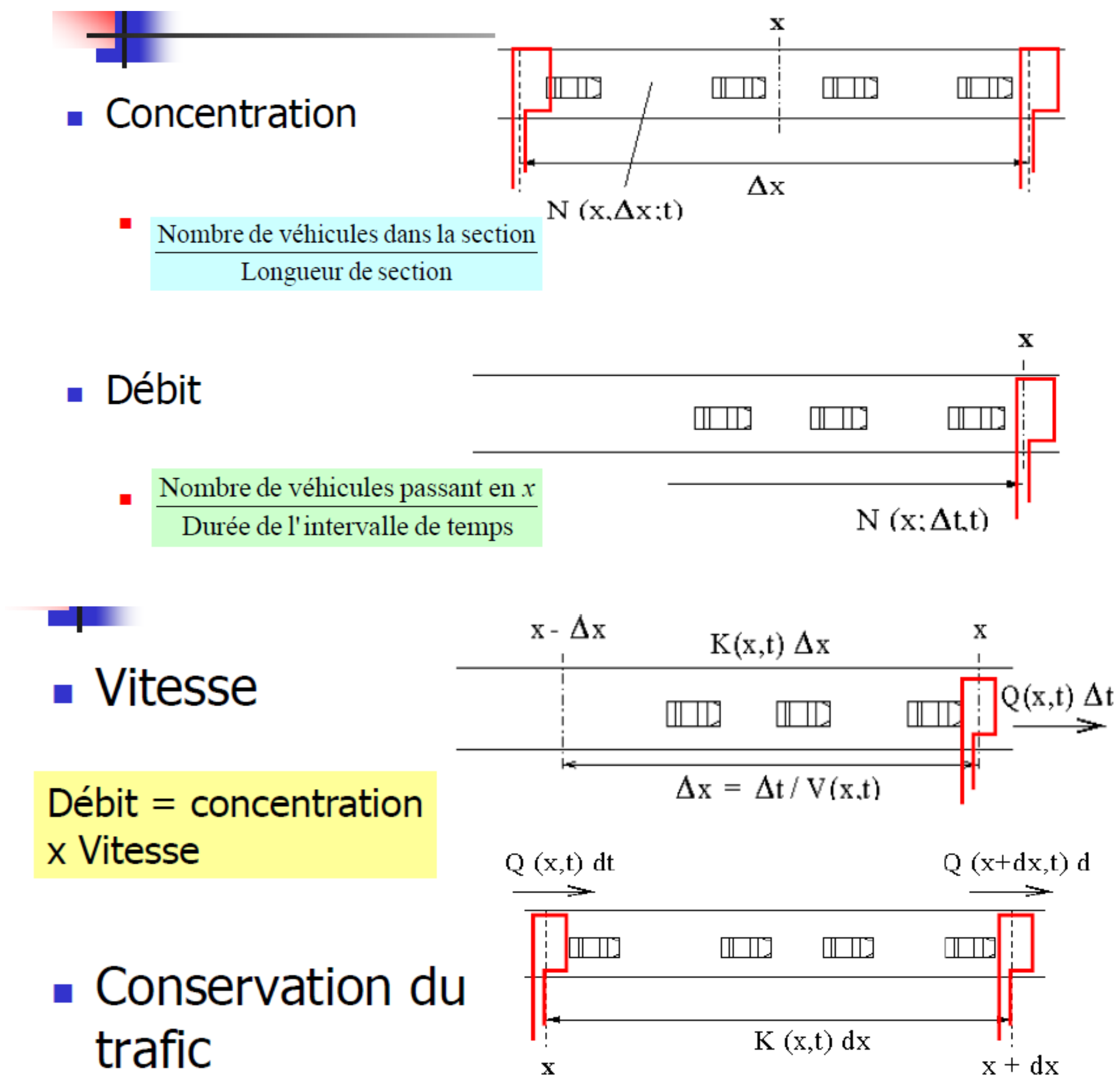
Si la demande excède la capacité, alors des véhicules seront ralentis à l'entrée de l'infrastructure, formant ainsi un bouchon.

Cas de circulation fluide

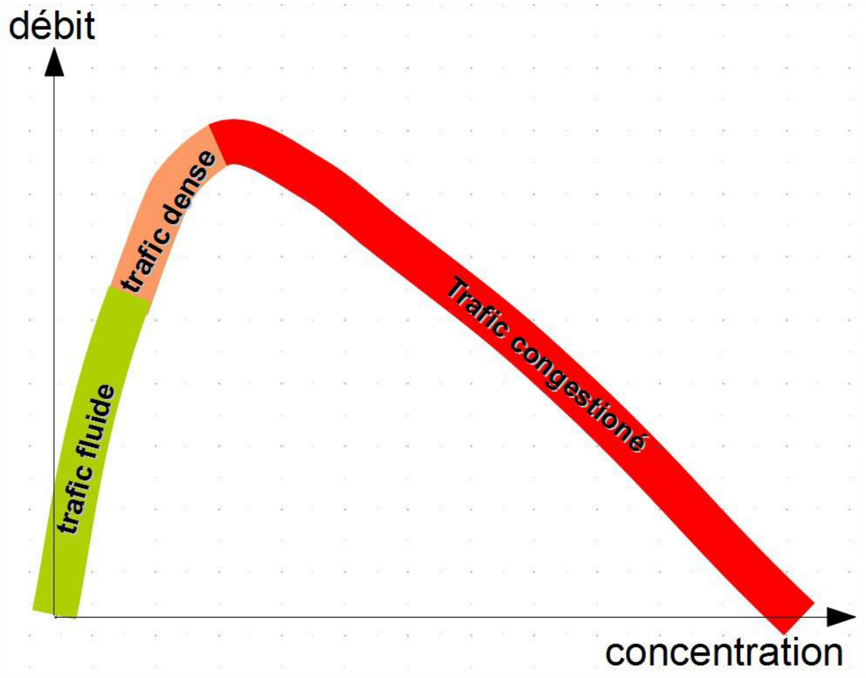


Cas de congestion





Si l'on observe le deroulement du trafic sur une route, alors il peut être représenté comme suit :



I.1.2 historique sur l’observation du trafic routier

Les premiers débuts des descriptions de flux de trafic sur une autoroute sont dérivés des observations de Greenshields, d'abord montrées au public il y a exactement 75 ans (Proc.de la 13e réunion annuelle du Conseil de recherches routières, décembre 1933).

Il a porté des tests pour mesurer le débit de la circulation, la densité du trafic et la vitesse de circulation par des méthodes de mesure pour la première fois. Un bref aperçu de son CV montre que Greenshields a commencé sa carrière en tant que scientifique en ingénierie de la circulation avec cette publication ce qui mène à une thèse de doctorat à l'Université du Michigan en 1934.

I.1.2.1 Comment Greensheilds a effectué les mesures ?

Dans son document original, nous lisons : «La méthode de sécurisation des données sur le terrain était assez simple. Une caméra de 16 mm a été utilisée pour prendre des photos. Un moteur électrique entraîné par une batterie de stockage d'automobile exploité, la caméra avec un intervalle de temps constant entre les expositions.

La figure 1 montre l'appareil photo avec la fixation du moteur. Varier la tension en changeant les bornes de la batterie contrôlée l'intervalle de temps, ce qui pourrait varier d’une demi-seconde à deux secondes. Cette méthode a été trouvée meilleure que le rhéostat contrôle. L'intervalle de temps a été soigneusement mesuré avec un chronomètre sur une période de 40 à 100 expositions et vérifié par la main de balayage d'une minuterie photographique inclus dans les images. Afin que les voitures en mouvement puissent apparaître dans au moins deux images consécutives un champ de deux fois l'espace parcouru par intervalle de temps était nécessaire.

Pour éviter le flou photographique dû au mouvement, la voiture en mouvement devait être à au moins 300 pieds (91,44 mètres puisque 1 pied = 0,3048 mètre) de la caméra. Dans ce cas, la longueur de la route incluse dans une image était d'environ 125 pieds (38,1 mètres). Le flou pourrait avoir été atténué en utilisant un obturateur plus rapide.

Figure 1 Les mesures mises en place par Grennsheild

Au début de chaque film, et toutes les heures pendant une course, il y avait une photographie avec tableau d'affichage donnant la date, l'heure, l'intervalle de temps, l'obturatrice ouverture et autres informations pertinentes. Le tissu blanc s'étendait le long du côté l'opposé de la route a été utilisé pour empêcher les véhicules de disparaître dans le fond sombre de la photo.

La figure suivante montre trois images prises avec le caméscope à une station d'étude.

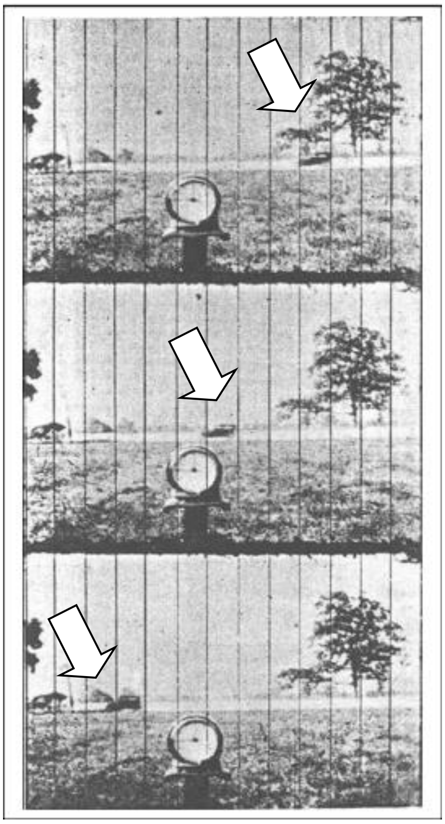


Figure 2 Trois prises d'images

Les lignes verticales sont ajoutées pour montrer à quoi ressemblent les images lorsqu'elles sont projetées sur un écran où les lignes dessinées représentent un échelle de distance. La distance mesurée par la caméra suffit pour donner l'échelle des dimensions qui sont plus précisément déterminées si la caméra est réglée parallèlement à la route. Une bande de 100 pieds (30,48 mètres) est posé le long du trottoir divisée en intervalle de 10 pieds (3,048 mètres) sert de marqueur. Il y a donc une échelle définie pour l'image.

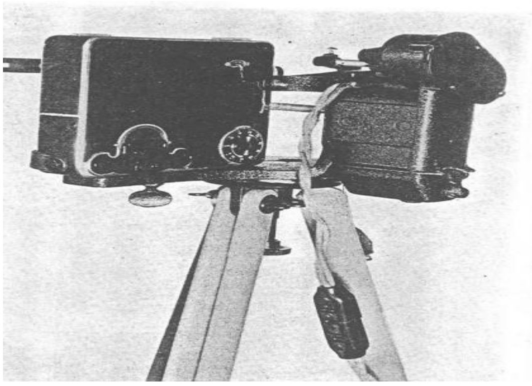


Figure 3 Caméra avec fixation de moteur utilisée par Greensheilds

Greensheilds par son expérience obtient une relation linéaire entre la vitesse et la densité du trafic, comme montré sur la figure 4 Par l'utilisation des lois de la physique

Débit = densité * vitesse,

La relation vitesse-densité linéaire se transforme en une relation parabolique entre la vitesse et le flux de circulation (figure 5).

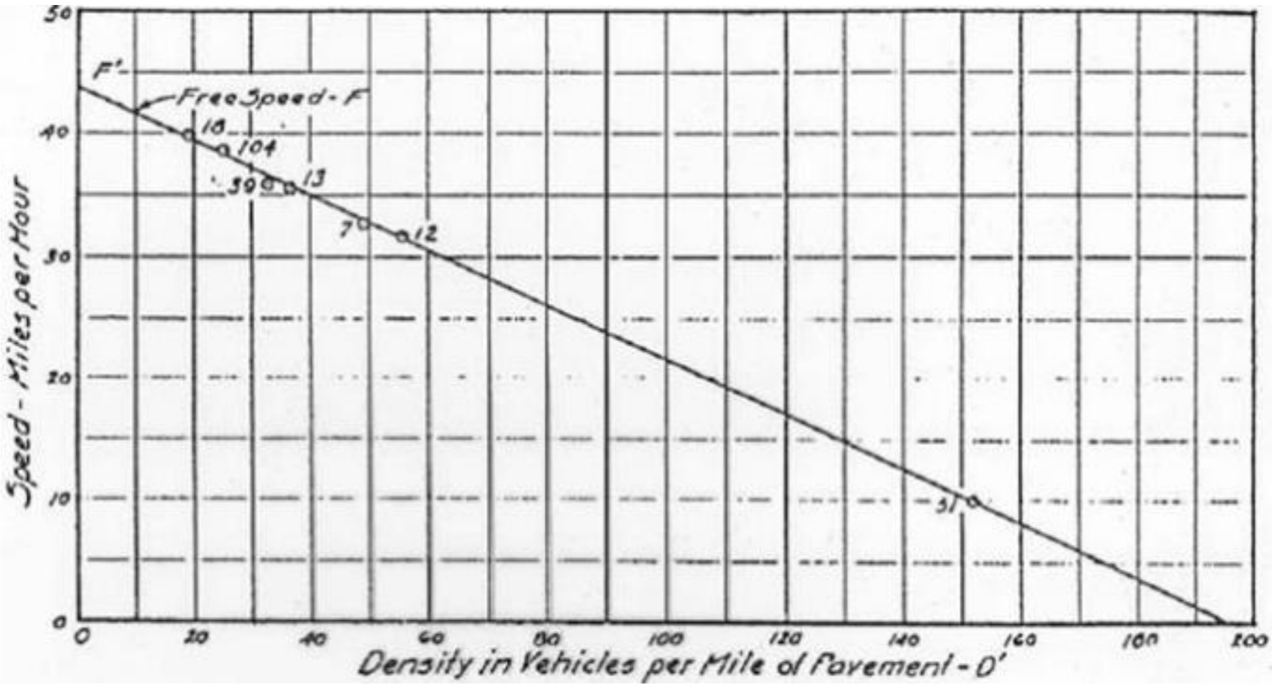


Figure 4 Relation de densité de vitesse V (Greensheilds 1934)

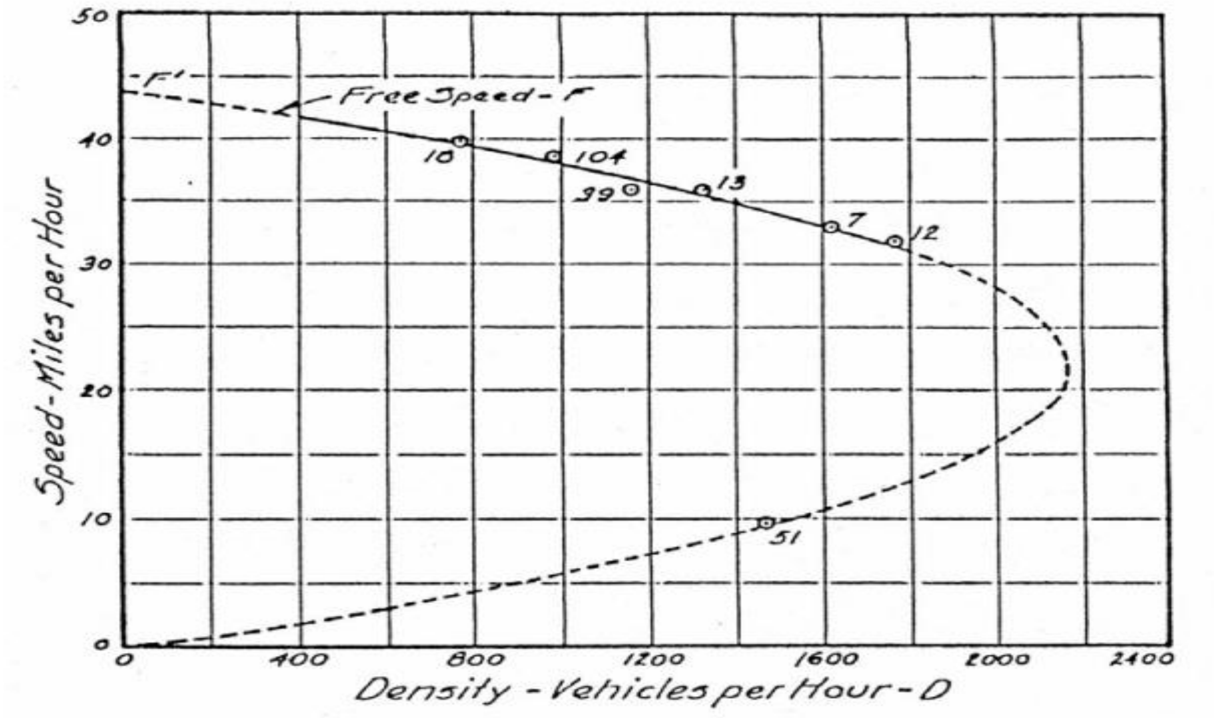


Figure 5 Le premier diagramme fondamental en tant que diagramme v-q

Dans ce modèle, certaines caractéristiques du flux de circulation sont bien exprimées. Il montre un débit maximum de trafic est associée à la densité de trafic optimale. Dans le diagramme Q-V « courbe parabolique », il existe deux régimes : libre et congestionné, cela signifie qu'il est possible d'avoir deux vitesses associées au même débit de trafic. Donc le débit de trafic est classé dans un régime libre et congestionné au même temps. La relation linéaire de Greensheilds serait appelée un modèle uni varié, parce que les deux régimes sont calculés avec la même formule.

I.1.2.2 Application du modèle Greensheilds

Greensheilds a réalisé l'une des premières œuvres enregistrées dans laquelle il a étudié la relation entre la vitesse et la densité. Il a émis l'hypothèse qu'il existait une relation linéaire entre la vitesse et la densité qu'il exprimait par :

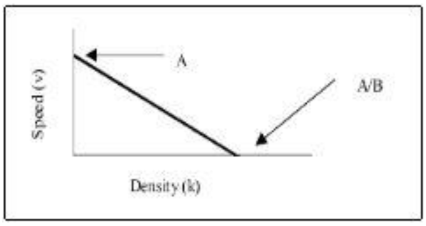
$$\overline{V_s} = V_f - \frac{V_f}{K_j} \times K$$

Où Vf la vitesse moyenne de libre circulation (lorsque q est très faible) et Kj est la concentration de bourrage (charge maximale d’une branche).

Greensheilds a fait l'hypothèse que, dans des conditions d'écoulement ininterrompues, la vitesse et la concentration (densité) sont linéairement liées. Cette relation est exprimée mathématiquement et graphiquement comme suit :

V = A-B * k

Où: V = vitesse (miles / heure, kilomètres / heure)



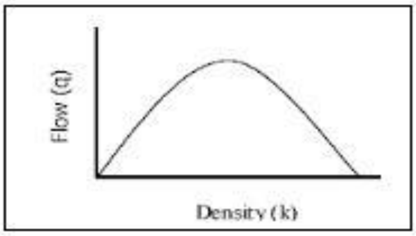
A, B = Constantes déterminées à partir des observations de terrain

k = densité (véhicules / mille, véhicules / kilomètre)

L'insertion de la relation vitesse-densité de Greensheilds dans la relation vitesse-débit-densité générale donne les équations suivantes :

q = (A-B * k) * k ou q = A * k - B * k^2

Où: q = débit (véhicules / heure)



A, B = constantes

k = concentration (véhicules / mille, véhicules / kilomètre)

Les équations du modèle générale de Greensheilds sont alors :

$$\boldsymbol{\overline{V_s} = V_f - \frac{V_f}{K_j} \times K}$$

Nous avons aussi q=Vs.K alors K=q/Vs (diagramme Vs-q), la substitution nous donne l'équation suivante :

$$\boldsymbol{\overline{V_s}^2 = V_f \times \overline{V_s} - \frac{V_f}{K_j} \times q}$$

Substituant également Vs=q/K (diagramme Q-K) :

$$\boldsymbol{\frac{q}{K} = V_f - \frac{V_f}{K_j} \times K \quad alors\; q = V_f \times K - \frac{V_f}{K_j} \times K^2}$$

Pour quel valeur de vitesse moyenne spatiale **Vo** de débit sera au maximum revient à calculer la dériver :

$$\frac{d}{d\overline{V_s}}\left[\overline{V_s}^2\right] = \frac{d}{d\overline{V_s}}\left[V_f \times \overline{V_s} - \frac{V_f}{K_j} \times q\right]$$

$$2 \times \overline{V_s} = \left[V_f - \frac{V_f}{K_j} \times \frac{dq}{d\overline{V_s}}\right]$$

$$\frac{V_f}{K_j} \times \frac{dq}{d\overline{V}_s} = \left[V_f - 2 \times \overline{V}_s\right] alors \frac{dq}{d\overline{V}_s} = \left[\frac{K_j}{V_f} \times V_f - 2 \times \overline{V}_s \times \frac{K_j}{V_f}\right] d'o\text{ù} \ \frac{dq}{d\overline{V}_s} = \left[K_j - 2 \times \overline{V}_s \times \frac{K_j}{V_f}\right] = 0$$

Remplaçant Vs par Vo alors $\left[K_j - 2 \times V_0 \times \frac{K_j}{V_f}\right] = 0 \ \rightarrow \ V_0 = \frac{V_f}{2}$

De même pour quel valeur de concentration Ko de débit sera au maximum revient à calculer la dériver :

$$\frac{dq}{dK} = \frac{d}{dK}\left(V_f \times K - \frac{V_f}{K_j} \times K^2\right) = 0 \ \rightarrow \ K_0 = \frac{K_j}{2}$$

D'autres part bous savons que Q=K*Vs alors le débit maximum sera obtenu par la substitution de la vitesse moyenne spatiale qui sature le débit ainsi que la concentration Ko sui donne le débit max. Alors on obtient :

$$Q_{max} = V_0 \times K_0 = \frac{V_f}{2} \times \frac{K_j}{2} = \frac{V_f \times K_j}{4}$$

Chapitre 2 : Les variables caractéristiques du trafic routier « Méthodes et calculs »

II.1 Introduction

De nos jours, se déplacer est devenu un aspect essentiel de la vie quotidienne : qu'il s'agisse de transports en commun ou de véhicules personnels, le vaste réseau formé de ces moyens de déplacement est très complexe à gérer. Car sa gestion recouvre l'ensemble des techniques humaines et automatisées permettant d'assurer un gain de performance dans l'acheminement des différents flux.

Dans le présent chapitre, nous commencerons par examiner les différentes variables qui permettent de caractériser la progression de véhicules sur une voie, avant de nous intéresser à la relation fondamentale qui permet de relier le nombre de véhicules présents à un instant « t » sur une longueur « L » de voie au nombre de véhicules passant en un point particulier de la voie.

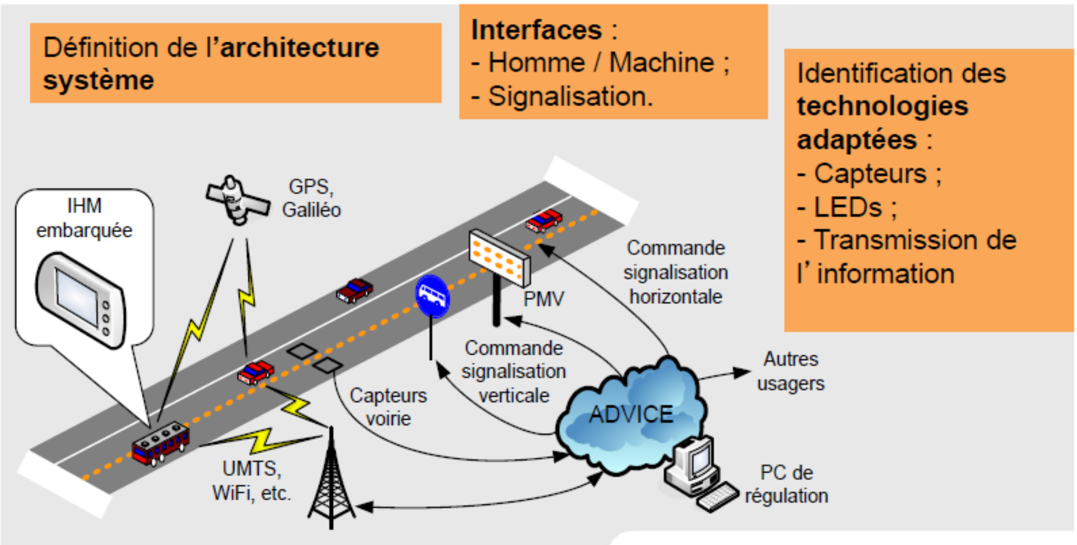
II.2 Les variables du trafic

Les variables du trafic, sont des quantités mesurables par des moyens de mesure adaptable sur route. Ils ce décomposent en deux catégories à savoir :

- les variables individuelles
- les variables collectives

II.2.1 Les Variables individuelles

Pour étudier un trafic quelconque, on peut s'intéresser à un véhicule choisi parmi les autres. Supposons que toutes les dix secondes on puisse mesurer sa position avec une précision suffisante grâce à un système de type GPS embarqué, on pourra alors schématiser l'évolution du véhicule sur la voie par la figure ci-dessous.



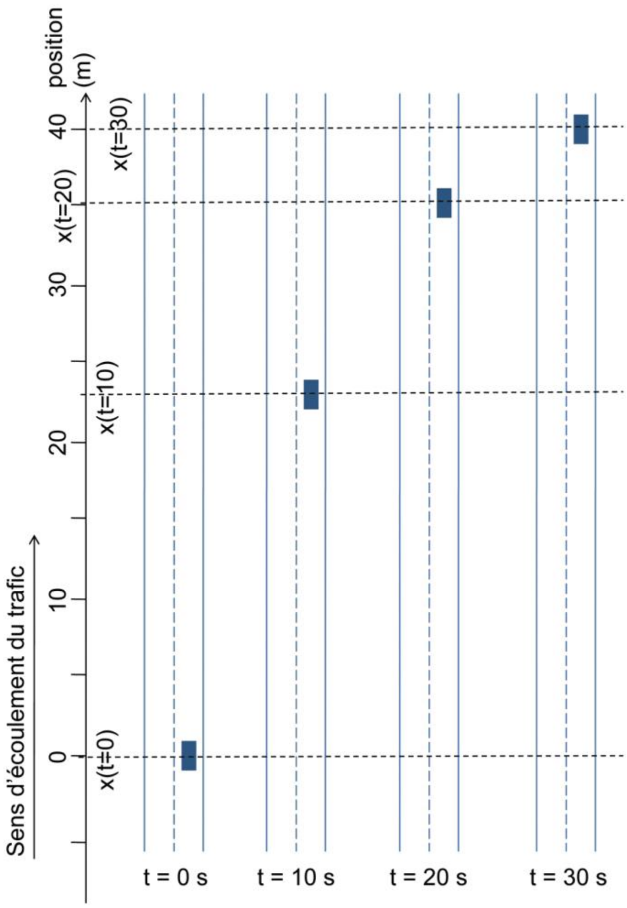


Figure 1-1 : position sur la voie d'un véhicule à quatre instants différents.

On a repéré la position longitudinale x(t) à t= 0, 10, 20 et 30 secondes. Ce véhicule a parcouru 40 mètres en 30 secondes, ce qui correspond à une vitesse d'un peu moins de 5km/h. Ce véhicule reste au centre de la voie de droite, sa position latérale y(t) n'est donc pas modifiée au cours de son trajet.
La trajectoire d'un véhicule est donc l'ensemble des points successifs de l'espace qu'il occupe accompagné des instants t de passage en ces points. Chaque point de la trajectoire peut donc être repéré

dans un espace à quatre dimensions : (x, y, z, t). Cependant on utilise plus généralement une abscisse curviligne : x est la position longitudinale, y la position latérale et on néglige la hauteur.

II.2.2 Mesures de $x(t)$

On a coutume de s'intéresser uniquement à la position longitudinale $x(t)$ par rapport à la voie. Ceci est lié à l'appareil de mesure qui, historiquement, est un capteur de tours de roues. On résume donc la voie à une droite, le long de laquelle on mesure la position. On parle donc couramment de trajectoire dans un plan (x, t). On peut représenter ces mesures sur la figure suivante. Remarquons au passage que le véhicule étudié est resté immobile entre les instants $t= 22\ s$ et $t= 24\ s$. On peut déduire de l'information de cette figure la distance parcourue (environ 3 mètres) par le véhicule pendant une seconde entre $t=4\ s$ et $t= 5\ s$ par exemple.

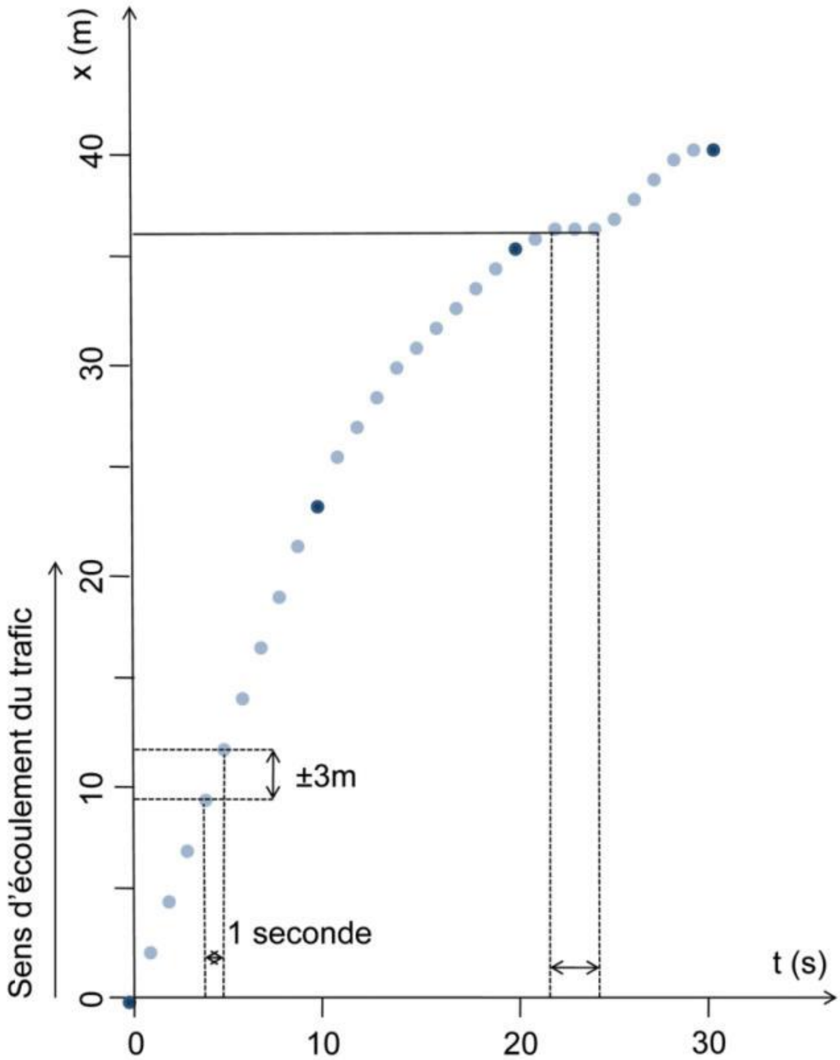


Figure 2-2 : trajectoire d'un véhicule dans le plan (x, t)

À partir de cette mesure de la position à chaque seconde, on peut dessiner une trajectoire entre les points mesurés $x=x(t)$,

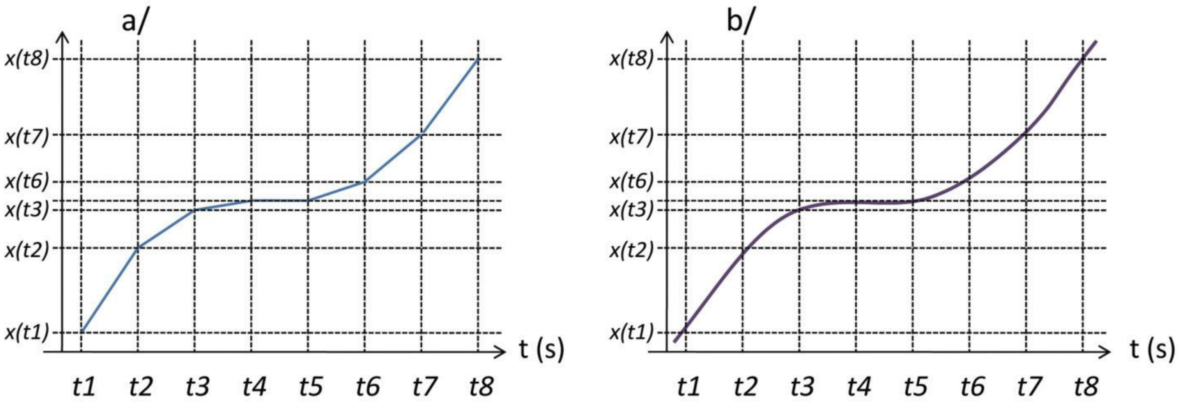


Figure 1-3 : deux trajectoires de véhicules : à gauche (a/) une trajectoire interpolée entre deux mesures de position successives ; à droite (b/) à partir d'une mesure continue de la vitesse et de la position.

Sur la figure a : La pente de la droite séparant deux mesures successives de la position est une mesure indirecte de la vitesse individuelle du véhicule à partir de sa position. Si on dispose d'une mesure directe de la vitesse individuelle, on peut tracer une trajectoire individuelle plus réaliste comme le montre la figure b.

II.2.3 Mesures de $t(x)$

Si, au lieu de disposer d'une mesure embarquée de la position du véhicule à chaque pas de temps, on place le long de la route des observateurs régulièrement espacés, chargés de mesurer les dates de passage du véhicule qui nous intéresse, on associera les instants aux points de mesure. Ceci est représenté sur la figure suivante :

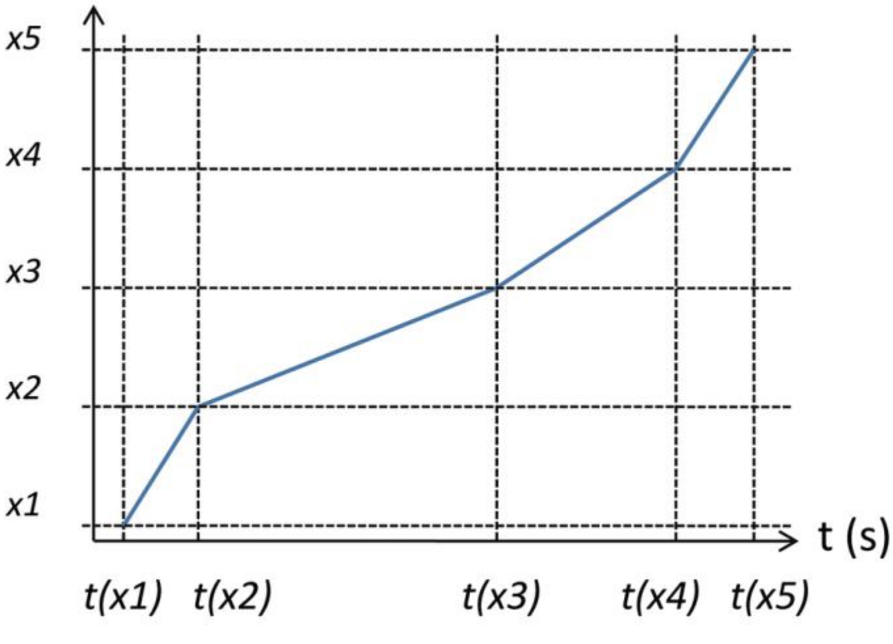


Figure 1-4 : évolution d'un véhicule dont la position est mesurée en des points Régulièrement espacés de la voie

Ces deux méthodes de mesure (de la position du véhicule à plusieurs instants successifs ou de la date de passage en plusieurs points régulièrement espacés d'une route) permettent de mesurer le même phénomène (la progression d'un véhicule sur une route) de deux manières complémentaires.

II.2.4 Variables et caractéristiques d'un véhicule

En plus de la position à un instant et de la date de passage en un point, on peut mesurer la vitesse (soit à un instant, soit en un point) ainsi que l'accélération. Ces variables sont relatives à l'évolution du véhicule le long de la route.

D'autres caractéristiques sont associées au véhicule : sa puissance moteur, sa longueur, sa masse, … ; ou au conducteur de ce véhicule : la destination finale de son voyage, son type de conduite (plus ou moins agressive), … D'autres caractéristiques encore sont liées non pas à l'une ou l'autre des deux entités de ce couple mais au couple lui-même. On parle alors du couple véhicule-conducteur.

Voici la synthèse des définitions présentées ci-dessus.

> La **position** d'un véhicule mesurée à un instant est notée $x(t)$.
>
> La **vitesse** d'un véhicule est la dérivée de la position par rapport au temps :
>
> $$V(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$
>
> L'**accélération** est la dérivée de la vitesse d'un véhicule par rapport au temps et donc la dérivée seconde de la position par rapport au temps :
>
> $$a(t) = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dV(t)}{dt}$$
>
> La **trajectoire** d'un véhicule est l'ensemble des points associés à la date de passage d'un véhicule. Elle peut être représentée dans un plan (x, t), soit à partir de mesures à chaque pas de temps de la position, soit à partir de mesures des instants de passage en des points régulièrement espacés de la route.

II.3 Variables concernant deux véhicules

Lorsqu'un véhicule suit un autre véhicule, on parle de véhicule suiveur et de véhicule leader ou de véhicule suivi. On peut les observer également de deux manières complémentaires l'une de l'autre :

- en un instant t ; dans ce cas, on mesure la distance entre ces deux véhicules. Ici peut intervenir la longueur du véhicule. Ceci conduit :
  - soit à l'*espacement* ou à la *distance inter-véhiculaire* (qui est la distance entre deux avants ou arrières de véhicules et qui se dit en anglais « *spacing* »),
  - *soit* au *créneau* (en anglais : *« space gap »)*, qui est la distance séparant l'arrière d'un véhicule de l'avant du véhicule qui le suit ;
- en un point x ; dans ce cas, on mesure le temps séparant les passages de deux véhicules successifs. De la même manière on peut mesurer :
  - le temps séparant le passage de l'avant ou de l'arrière de deux véhicules successifs : le temps inter-véhiculaire,
  - ou le temps séparant le passage de l'arrière d'un véhicule du passage de l'avant du véhicule suivant. Ce dernier est appelé *intervalle*, *créneau temporel* ou « *time gap* » en anglais.

Ces notions sont illustrées sur la figure suivante :

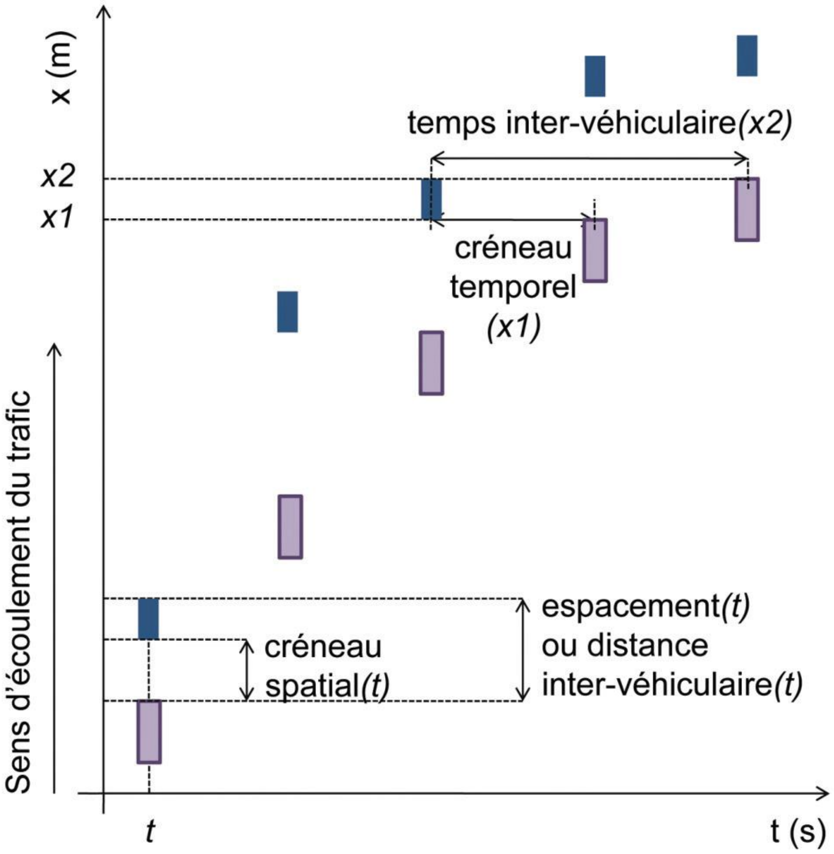


Figure 2-5 : trajectoires de deux véhicules : un véhicule leader et son véhicule suiveur. On a représenté le créneau temporel (temps qui sépare le passage de l'arrière du leader de l'avant du suiveur en un point) et le temps inter-véhiculaire ; le créneau spatial et la distance inter-véhiculaire.

II.3.1 Distribution de temps inter-véhiculaires

La distribution du temps inter-véhiculaires peu être mesurer par un équipement placer sur un tronçon de voie appelé « **boucle électromagnétique** ». C'est un des capteurs les plus utilisés pour mesurer les variables globales telles que le débit et le *taux d'occupation*. Ce capteur peut également être utilisé pour mesurer aussi les dates de passage des véhicules. C'est un capteur ponctuel, c'est-à-dire qu'il mesure ce qui se passe au point où il est situé.

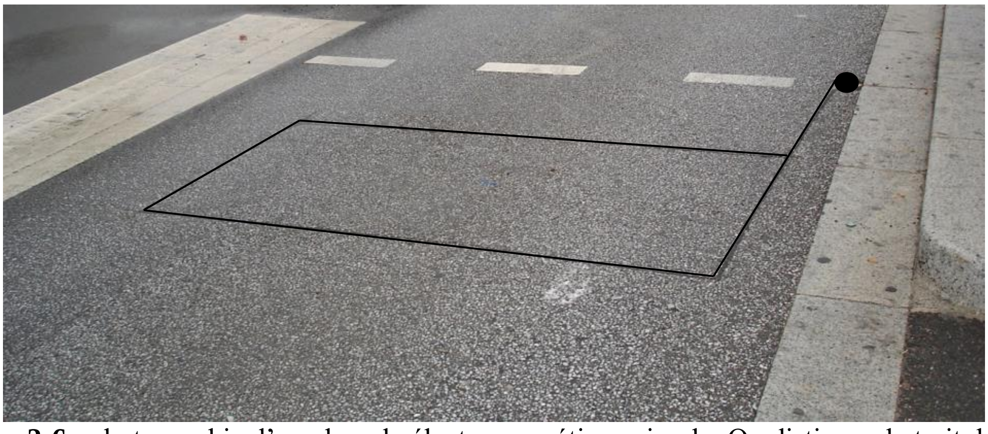


Figure 2-6 : photographie d'une boucle électromagnétique simple. On distingue le trait de scie rectangulaire (la boucle elle-même) et le trait de scie rectiligne qui relie la boucle au générateur électrique et au détecteur de champ magnétique.

Le principe de la pose d'une boucle électromagnétique est le suivant : un trait de scie est fait dans l'enrobé, de forme généralement rectangulaire, dans lequel on place un câble électrique, qui est parcouru par un courant électrique. Au passage d'un véhicule comportant des parties métalliques (moteur, essieux…) un champ magnétique est créé qui, s'il est supérieur à un seuil, permet d'identifier que la boucle est occupée. On peut donc compter le nombre de véhicules passant sur la boucle pendant une période donnée pour déterminer le débit.

Exemple :

Certains capteurs permettent de mesurer les dates de passage des véhicules en un point. La figure suivante présente les observations faites sur les temps séparant l'entrée sur un capteur (une boucle électromagnétique dont nous verrons le fonctionnement plus loin) de deux véhicules successifs.

Le nombre d'observations pour chaque valeur de temps inter-véhiculaire est présenté pour trois voies d'une autoroute urbaine du nord d'une ville en Europe. Les temps inter-véhiculaires (TIV) sont donnés en secondes.

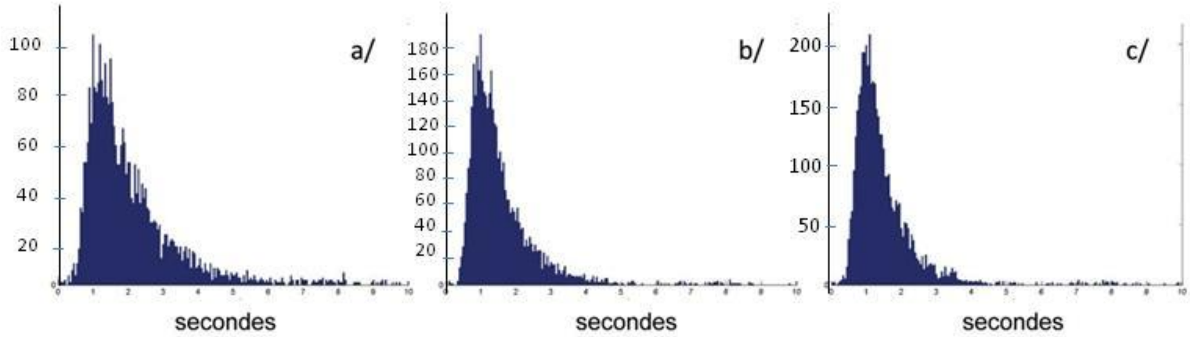
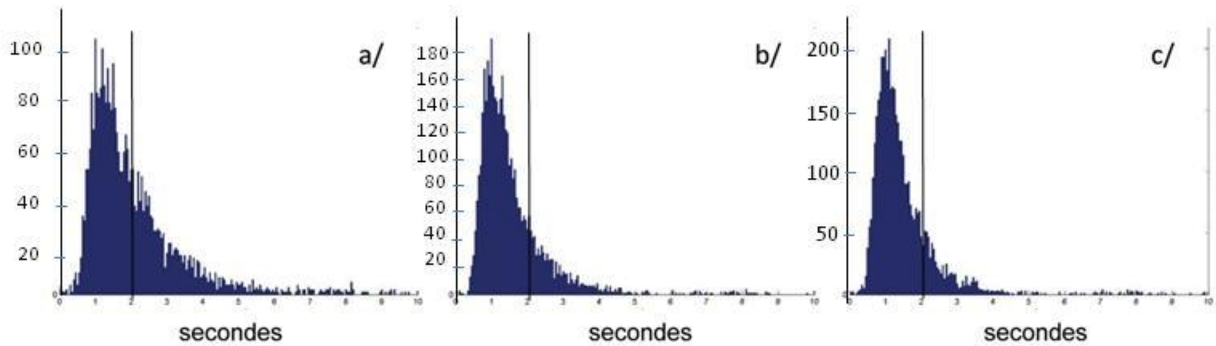


Figure 2-7 : trois distributions des temps inter-individuels observées sur une autoroute: a/ voie de droite, b/ voie centrale, c/ voie de gauche.

On constate que les temps inter-véhiculaires sont plus dispersés sur la voie de droite (a/) que sur celle de gauche (c/). Ceci s'explique par la présence de poids lourds sur la voie de droite.

Selon le code de la route :
« *Lorsque deux véhicules se suivent, le conducteur second doit maintenir une distance de sécurité suffisante pour pouvoir éviter une collision en cas de ralentissement brusque ou d'arrêt subit du véhicule qui le précède. Cette distance est d'autant plus grande que la vitesse est élevée. Elle correspond à la distance parcourue par le véhicule pendant un délai d'au moins deux secondes.* »



Démonstration de la formule "5/9"
Si on note d la distance de sécurité et v la vitesse, la durée étant égale à 2 secondes, on a : d(m) = v(m/s) * 2 s

Or 1 m/s = 3,6 km/h (car 1 h = 3600 s)
On a v(km/h) = 3,6 v(m/s), par exemple 10 m/s = 36 km/h
d(m) = 2 * v(km/h) / 3,6
d(m) = 20/36 v(km/h)
d(m) = 5/9 v(km/h)

On voit ici une nette situation **de non respect du code de la route**, qui lui est défini pour garantir une sécurité acceptable quel que soit le type de conducteur, et l'adaptation qu'en font les usagers.

II.3.2 Le taux d'occupation

On peut également utiliser le temps pendant lequel la boucle est occupée par chaque véhicule pour avoir une estimation indirecte de la concentration. La figure ci-dessous illustre la notion de taux d'occupation. Le temps pendant lequel la boucle électromagnétique détecte un signal : • i est lié à la vitesse $V_i$du véhicule i, à sa longueur L_i, ainsi qu'à la longueur de la boucle λ. Si on s'intéresse à N véhicules successifs, ayant traversé la boucle pendant une période Δt, on peut calculer la fraction du temps pendant laquelle cette boucle a été occupée par des véhicules.

Le taux d'occupation noté TO, exprimé en pourcentage, est calculée comme suit :

$$TO(t \to t + \Delta t) = \frac{100}{\Delta t} \times \sum_{i=1}^{N} \theta_i$$

C'est un nombre égal à la friction du temps pendant laquelle la boucle électromagnétique est occupée.

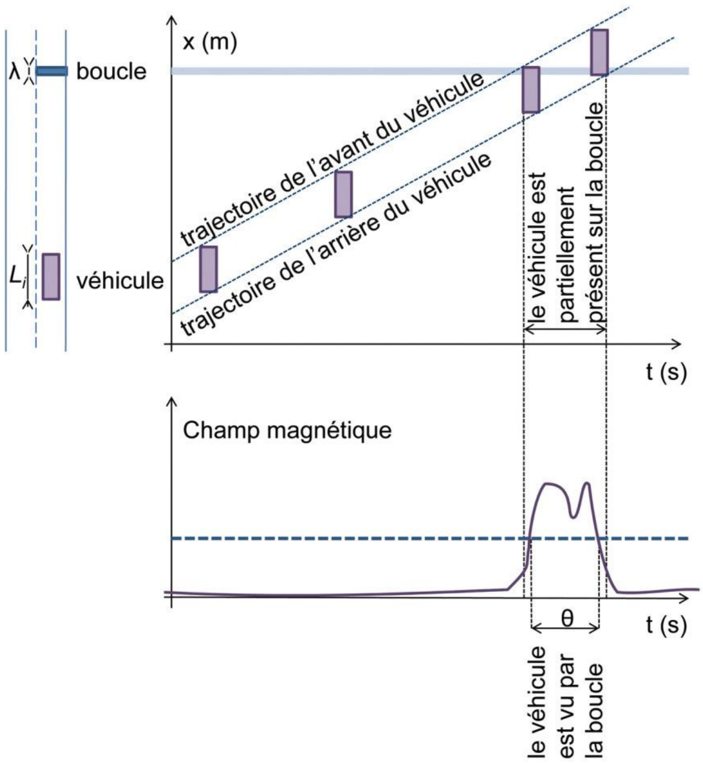


Figure 1-8 : Principe de fonctionnement de la boucle électromagnétique simple.

On peut utiliser le taux d'occupation pour estimer la concentration. En effet, le temps de séjour • i sur la boucle d'un véhicule i donné est relié directement à la longueur et à la vitesse de ce véhicule ainsi qu'à la longueur de la boucle :

$$\theta_i = \frac{\lambda + \mathrm{L_i}}{V_i}$$

En combinant les deux dernières équations :

$$TO(t \to t + \Delta t) = \frac{100}{\Delta t} \times \sum_{i=1}^{N} \theta_i = \frac{100}{\Delta t} \times \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda + \mathrm{L_i}}{V_i}$$

On peut faire une hypothèse simplificatrice très rarement valide, à savoir que tous les véhicules aient la même longueur *L*. Si ceci est vrai, l'équation ci-dessus devient :

$$TO(t \to t + \Delta t) = \frac{100}{\Delta t} \times \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda + \mathrm{L_i}}{V_i} = 100 \times (\lambda + \mathrm{L}) \times \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{V_i}$$

Si l'on posse : $K = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Vi}$

On obtient :

$$TO(t \to t + \Delta t) = 100 \times (\lambda + \mathrm{L}) \times K$$

Insistons ici sur le fait que les véhicules mesurés pendant une période Δt ont très rarement tous la même longueur et que l'hypothèse simplificatrice nécessaire pour relier simplement la concentration K au taux d'occupation TO est donc hasardeuse. Néanmoins, c'est généralement avec la formule ci-dessus que l'on estime la concentration, avec une erreur qui reste admissible si le pourcentage de poids lourds est faible.

II.4 Variables concernant un flot de véhicules

Un flot de véhicules est l'ensemble des véhicules parcourant une voie à une période donnée dans un seul sens d'écoulement.. Les véhicules ont divers caractéristiques physiques (poids, longueur, puissance…) et autres (vitesse désirée, nombre de passagers…). Pour mesurer les flots de véhicules, on s'intéresse à des variables globales dont les définitions sont données ci après

Voici la synthèse des définitions présentées ci-dessus.

> Le **débit** Q est le nombre N de véhicules passant pendant une période ΔT en un point x, rapporté à la durée de la période : $Q_{\Delta t}(x) = Q(x, t \to t + \Delta t) = \frac{N}{\Delta t}$. Il est exprimé en nombre de véhicules par unité de temps (véh/h ou véh/s généralement) ;
>
> La **concentration** K, appelée aussi densité, est le nombre M de véhicules situés entre x et $x + \Delta X$ à un instant t, rapporté à la longueur de la voie : $K_{\Delta x}(t) = K(x \to x + \Delta x, t) = \frac{M}{\Delta x}$. La concentration est exprimée en nombre de véhicules par unité de longueur (véh/km ou véh/m).

Il est intéressant de remarquer que si le débit est mesuré en un point pendant une période, la concentration, elle, est mesurée à un instant le long d'un tronçon de route. La complémentarité de ces deux mesures est similaire à celle que nous avons déjà notée sur les temps inter-véhiculaires et les distances inter-véhiculaires. Ceci est illustré sur la figure suivante.

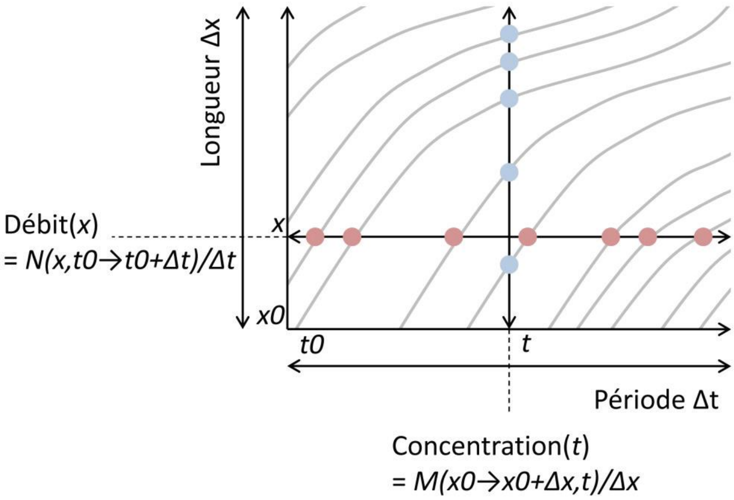


Figure 1-6 : illustration de la différence entre vitesse moyenne temporelle calculée sur la base de la vitesse individuelle des véhicules passant en un point pendant une période Δt (vitesses figurées en rouge) et vitesse moyenne spatiale calculée à partir des vitesses individuelles de tous les véhicules présents sur une longueur Δx (figurées en bleu).

II.5 Relation entre la vitesse du flot, la concentration et le débit « modèle macroscopique »

La mécanique des fluides nous enseigne que le débit est égal au produit de la concentration fois la vitesse du flot $Q=K*V$. La vitesse du flot *V* est donc donnée par l'équation : $V=Q/K$, Cette relation est très utilisée en théorie du trafic pour l'analyse de l'écoulement unidirectionnel de flux.

- Le débit, noté $Q(x,t)$, est le nombre de véhicules qui passent en un point x du réseau à l'instant t .
- La concentration, notée $K(x,t)$ correspond aux nombres de véhicules présents au point x à l'instant t .
- La vitesse du flot, notée $V(x,t)$, est la vitesse moyenne des véhicules se situant en x à l'instant t .

II.5.1 Formulation problèmes de continuité

Ces problèmes de continuité refont surface lorsqu'il s'agit de mesurer expérimentalement ces variables (Q(x,t), K(x,t) et V (x,t)). Supposons que le long de l'infrastructure routière il n'y a ni apport ni perte. Pour cela, le premier modèle macroscopique qui a été développé de façon simultanée par Lighthill et Whitham dans [Lighthill et Whitham, 1955] et par Richards dans [Richards, 1956]. Ce modèle repose sur trois équations qui relient les trois variables Q, K et V:

$$\begin{cases} Q(x,t) = K(x,t) \times V(x,t) \\ \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + \dfrac{\partial K(x,t)}{\partial t} = 0 \\ V(x,t) = V_e\left(K(x,t)\right) \end{cases}$$

La première équation est la définition de la vitesse. La deuxième est l'équation de conservation des véhicules. La troisième est appelée diagramme fondamental. Dans cette dernière, on suppose que le trafic est toujours à l'équilibre, et qu'il évolue en passant d'un état d'équilibre à un autre. Il s'agit d'une équation empirique qui permet de caractériser l'infrastructure sur laquelle circulent les véhicules.

Le premier diagramme fondamental a été proposé par Greenshields dans [Greenshields, 1935] suite à des mesures expérimentales.

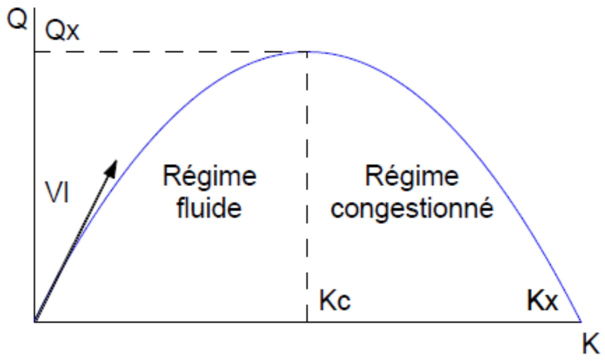


Figure 1-7 : diagramme fondamental de Greenshields

Un grand nombre de diagrammes ont été proposés depuis afin d'améliorer la description de l'écoulement. Tous ces diagrammes partagent certaines propriétés de bon sens :

- quand la concentration est proche de 0, les interactions entre véhicules sont très limitées (car il y a peu de véhicules), donc ces véhicules roulent à leur vitesse maximale désirée, ce qui se traduit par une borne sur la vitesse du flot, notée V_l ;
- quand la concentration augmente, les interactions entre véhicules sont de plus en plus fortes, donc leur vitesse diminue ;
- la concentration est bornée par une certaine valeur, notée Kx (cette borne correspond au cas limite d'une route sur laquelle tous les véhicules sont arrêtés les uns derrière les autres).

L'intérêt du diagramme en débit par rapport à celui en vitesse est qu'il fait apparaître deux régimes d'écoulement, la limite entre les deux correspondant à un état dit critique dont la concentration est notée K_c (on notera V_c la vitesse correspondante). Le premier est le régime fluide pour lequel une augmentation de la concentration se traduit par une augmentation du débit. Le second est le régime congestionné qui se traduit par une diminution du débit quand la concentration augmente.

Chapitre 3 : Les paramètres de gestion dynamique de la circulation

III.1 Introduction

La vitesse est l'un des paramètres de base de la circulation ; la vitesse moyenne temporelle et la vitesse moyenne spatiale sont les deux représentations de la vitesse. Le temps et l'espace signifient la vitesse et la relation entre eux sera discutée en détail dans ce chapitre. La relation entre les paramètres fondamentaux de la circulation sera aussi être dérivée. En outre, cette relation peut être représentée sous forme graphique résultant du fondamental diagramme de circulation.

Dans la suite de ce chapitre , on va présenté les résultat du comptage des véhicules qu'on a fait au niveau du carrefour Zouaghi Slimane pour ressortir les vitesses moyennes temporelle (Vt), les vitesses moyennes spatial (Vs) et la concentration (K) .

III.2 Vitesse moyenne temporelle (v_t)

La vitesse moyenne temporelle $\boldsymbol{v_t}$est la moyenne de tous les vitesses de véhicules qui passent en point sur une période donnée (vitesse moyenne du flot). Elle est donnée par la formulation suivante :

$$\boldsymbol{v_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i}$$

Où : $\boldsymbol{v_i}$ est la vitesse de circulation du véhicule « ***i*** », et **n** est le nombre d'observations.

<u>Exemple 1</u>

Si les vitesses flot de cinq véhicules sont respectivement : 50, 40, 60, 54 et 45 [km/h], alors calculer la vitesse moyenne temporelle.

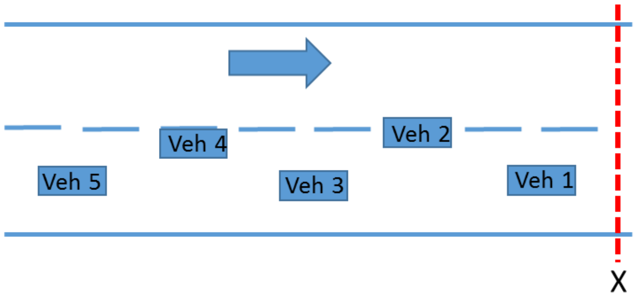


Figure III.1 : La vitesse moyenne temporelle

$$v_t = \frac{\sum v_i}{n} = \frac{50+40+60+54+45}{5} = \frac{249}{5} = 49.8 \text{ [km/h]}$$

Dans de nombreuses études, les vitesses sont représentées sous la forme de tableau de fréquence « où bien en classe de même fréquence $\boldsymbol{q_i}$ ». Dans ce cas la vitesse moyenne temporelle sera donnée par la relation suivante :

$$v_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i}$$

Où q_i est le nombre de véhicules ayant la vitessev_i, et **n** le nombre de ces catégories de vitesse. Lorsque les valeurs sont regroupées en **classes de valeurs**, on calcule la moyenne à l'aide du **centre des classes**.

II.3 La vitesse moyenne spatiale (Vs)

La vitesse moyenne spatiale qui est également la moyenne de la vitesse du flot, mais la pondération spatiale est donnée à la place du temporel. Tenant compte de la longueur unitaire d'une route, et $\boldsymbol{v_i}$ la vitesse du véhicule « i ». Soit t_i le temps que prend le véhicule pour parcourir la distance unitaire « égale à l'unité » alors t_i=1/v_iS'il y a « n » véhicules de ce type sur la voie, le temps de trajet moyen ts est donné par :

$$t_s = \sum \frac{t_i}{n} = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{v_i}$$

Si t_{av}est le temps de parcours moyen, puis la vitesse moyenne spatiale $v_s = \frac{1}{t_s} = \left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{v_i}\right)^{-1}$. Par conséquent, à partir cette équation on obtient :

$$v_s = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i}}$$

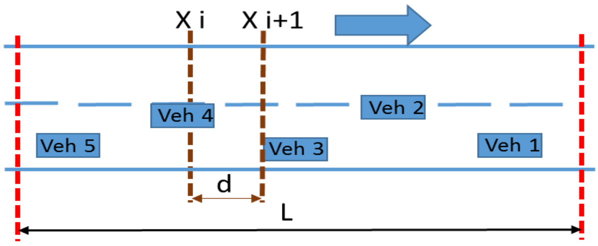


Figure III.2 La vitesse moyenne spatial

Si les vitesses du flot sont exprimées sous la forme d'un tableau de fréquences,

$$v_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{v_i}}$$

Où le véhicule $\boldsymbol{q_i}$ aura la vitesse $v_i$et n_i le nombre de ces observations

<u>**Exemple1**</u> :

Si les vitesses spot sont 50, 40, 60, 54 et 45 [km/h], alors trouvez la vitesse moyenne temporelle et la vitesse moyenne de l'espace.

<u>**Solution**</u>

La vitesse moyenne temporelle $\boldsymbol{v_t}$ est la moyenne de la vitesse du spot

$$v_t = \frac{\sum v_i}{n} = \frac{50+40+60+54+45}{5} = \frac{249}{5} = 49.8 \text{ [Km/h]}$$

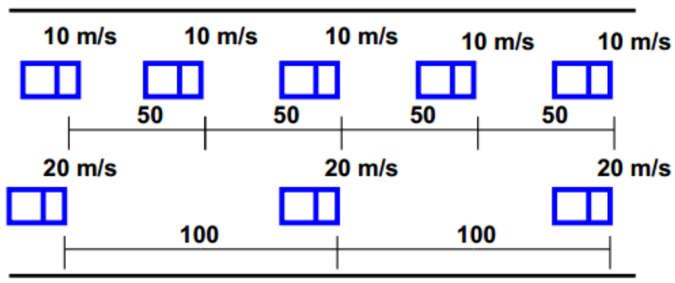
La vitesse moyenne spatiale $\boldsymbol{v_s}$est la moyenne harmonique du flot de vitesses

$$v_s = \frac{n}{\sum \frac{1}{v_i}} = \frac{5}{\frac{1}{50}+\frac{1}{40}+\frac{1}{60}+\frac{1}{54}+\frac{1}{45}} = \frac{5}{0.12} = 48.82 \text{[Km/h]}$$

NB: La vitesse moyenne temporelle est toujours supérieure à la vitesse moyenne spatiale.

III.4 Illustration de l’utilisation des vitesses moyennes

Pour comprendre le concept de vitesse moyenne temporelle et de vitesse moyenne spatiale, considérons le tronçon de route ayant deux voies de circulation, sur chaque voie existe un ensemble de véhicules comme sur la figure suivante :



$h_s = 50/20 = 5sec$ $n_s = 60/5 = 12$ $k_s = 1000/50 = 20$

$h_f = 100/20 = 5sec$ $n_f = 60/5 = 12$ $k_f = 1000/100 = 10$

Figure III.3 Illustration de l’utilisation des vitesses moyennes

Le premier sous-groupe de véhicules se déplace à une vitesse de 10 [m/s]avec un espacement de 50 [m] « Distance inter-véhiculaire », et le second sous ensemble roulet à une vitesse de 20 |m/s] avec un espacement de 100 [m].

Par conséquent, le temps d'avancée du véhicule lent « **hs** »sera de 50 [m] divisé par 10 [m/s] ce qui donne 5 [sec]. Par conséquent, le nombre de véhicules lents observés en une **heure** (60 minute) « **ns** » **sera 60/5 = 12 véhicules.**

Le temps d’avancé du véhicule rapide « **h**$_{\mathbf{f}}$ » sera de 100 [m] divisé par 20 [m/s] ce qui donne aussi 5 [sec] et par conséquent le nombre de véhicules rapides observés en une **heure** (60 minute) « **nf** » **sera 60/5 = 12 véhicules**

Par conséquent et par définition, la vitesse moyenne temporelle :

$$v_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i}$$

$$v_t = \frac{12\times10+12\times20}{24} = 15\ [m/s].$$

De même, par définition, la vitesse moyenne spatiale qui est la moyenne des vitesses des véhicules sur la voie par rapport au temps, donc :

$$v_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{qi*v_i}{n},$$

q_i : Le nombre de véhicules présents sur les deux voies (lente et rapide) pour une longueur de tronçon égale à 1[km]. Alors le calcul de la concentration s'impose….!

- **La concentration K** qui est le nombre de véhicules situés entre **x** et x+ΔX à un instant t, rapporté à la longueur de la voie. Donc sur une distance de **1 [km]** la concentration sur la voie lente K sera égale à **1000/50 = 20 [véhicules/km].** Sur la voie rapide la concentration K_f sera égale à **1000/100= 10 [véhicules/km]**, donc :

$$v_s = \frac{20 \times 10 + 10 \times 20}{30} = 13.3\ m/s$$

C'est la même chose que la moyenne harmonique des vitesses.

$$v_s = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{q_i}{v_i}\right]}$$

$$v_s = \frac{24}{12 \times \frac{1}{10} + 12 \times \frac{1}{20}} = 13.3\ m/s$$

On peut noter que la moyenne harmonique étant toujours inférieure à la moyenne arithmétique et que la vitesse moyenne spatiale est toujours inférieure à la vitesse moyenne temporelle. En d'autres termes, l'espace signifie que la vitesse pèse plus lourdement sur les véhicules plus lents car ils occupent le tronçon de la route plus longtemps en durée du temps. Pour cette raison, dans de nombreuses équations de trafic fondamentales, la vitesse moyenne spatiale est préférée à la vitesse moyenne temporelle.

III.5 Relation entre la vitesse moyenne temporelle et la vitesse moyenne spatiale

La relation entre la vitesse moyenne temporelle et la vitesse moyenne spatiale peut être calculée comme suit.

Considérons un flux de véhicules avec un ensemble de sous -flux$q_1; q_2 \dots\dots q_i \dots\dots q_n$ayant la vitesse $\boldsymbol{v_1}; \boldsymbol{v_2} \dots\dots\dots \boldsymbol{v_i} \dots\dots\dots \boldsymbol{v_n}$la relation fondamentaleentre le flux (Q), la concentration « densité » (K) et la vitesse moyenne spatiale (vs) est donnée par la formulation suivante :

$$q = k \times v_s \tag{1}$$

Par conséquent, pour tout sous-flux qi, la relation suivante sera validée :

$$q_i = k_i \times v_i \tag{2}$$

La somme de tous les flux de sous-flux donnera le flux total q.

$$\sum q_i = q \tag{3}$$

De même, la somme de toutes les concentrations (densités) de sous-flux donnera la concentration k.

$$\sum k_i = k \tag{4}$$

Notons la proportion de la densité du sous-courantk_i par rapport à la densité totale K :

$$f_i = \frac{k_i}{k} \tag{5}$$

La vitesse moyenne spatiale est la moyenne de la vitesse sur l'espace. Par conséquent, si les véhicules$k_i$ont une vitesse v_i, alors la vitesse moyenne spatiale est donnée par :

$$v_s = \frac{\sum k_i v_i}{k} \tag{6}$$

La vitesse moyenne temporelle est la moyenne de la vitesse dans le temps.

$$v_t = \frac{\sum q_i v_i}{q} \tag{7}$$

Substituer en (2) v_t peut-être écrit comme

$$v_t = \frac{\sum k_i {v_i}^2}{q} \tag{8}$$

Réécriture de l'équation ci-dessus et la substitution de (6), puis en remplaçant (1), nous obtenons

$$v_t = k \sum \frac{k_i}{k} {v_i}^2$$

$$= \frac{k \sum f_i {v_i}^2}{q}$$

$$= \frac{\sum f_i v_i^2}{v_s}$$

En ajoutant et soustrayant $v_s$et en faisant des manipulations algébriques, v_t peut être écrit comme

$$v_t = \frac{\sum f_i (v_s + (v_i - v_s))^2}{v_s} \tag{9}$$

$$= \frac{\sum f_i (v_s)^2 + (v_i - v_s)^2 + 2.v_s.(v_i - v_s)}{v_s} \tag{10}$$

$$= \frac{\sum f_i v_s^2}{v_s} + \frac{\sum f_i (v_i - v_s)^2}{v_s} + \frac{2.v_s .\sum f_i (v_i - v_s)}{v_s} \tag{11}$$

Le troisième terme de l'équation sera nul parce que$\sum f_i (v_i - v_s)$sera nul, puisque vs est la vitesse moyenne de v_i Le numérateur du second terme donne l'écart-type de v_i. $\sum f_i$par définition est égale a 1 ; Par conséquent

$$= v_s \sum f_i + \frac{\sigma^2}{v_s} + 0 \tag{12}$$

$$\boldsymbol{v_t = v_s + \frac{\sigma^2}{v_s}} \tag{13}$$

Par conséquent, la vitesse moyenne temporelle est la vitesse moyenne spatiale plus l'écart-type de la vitesse du point divisé par la vitesse moyenne spatiale. La vitesse moyenne temporelle sera toujours supérieure à la vitesse moyenne spatiale puisque l'écart-type ne peut pas être négatif. Si toutes les vitesses des véhicules sont identiques la vitesse du spot, la vitesse moyenne temporelle et la vitesse moyenne spatiale seront également les mêmes.

III.6 L'approche microscopique

Approche macroscopique : L'approche macroscopique considère les flux de trafic et développe des algorithmes qui relient le flux aux vitesses moyennes de densité et d'espace. Les deux modèles macroscopiques les plus couramment utilisés sont les modèles Greenshields et Greenberg.

Les équations du modèle générale de Greenshield :

$$\overline{V_s} = V_f - \frac{V_f}{K_j} \times K$$

Nous avons aussi q=Vs.K alors K=q/Vs (diagramme Vs-q), la substitution nous donne l'équation suivante :

$$\overline{V_s}^2 = V_f \times \overline{V_s} - \frac{V_f}{K_j} \times q$$

Substituant également Vs=q/K (diagramme Q-K) :

$$\frac{q}{K} = V_f - \frac{V_f}{K_j} \times K \quad alors\ q = V_f \times K - \frac{V_f}{K_j} \times K^2$$

Exemple 6.2 Ajustement des données de vitesse et de densité au modèle Greenshields

Utilisons maintenant les données du tableau 6.1 (colonnes 1 et 2) pour démontrer l'utilisation de la méthode d'analyse de régression pour ajuster les données de vitesse et de densité aux modèles macroscopiques discutés précédemment.

Table 6.1 Speed and Density Observations at a Rural Road

(a) Computations for Example 6.2

Speed, u_s (mi/h) y_i	*Density, k (veh/mi) x_i*	$x_i y_i$	x_i^2
53.2	20	1064.0	400
48.1	27	1298.7	729
44.8	35	1568.0	1,225
40.1	44	1764.4	1,936
37.3	52	1939.6	2,704
35.2	58	2041.6	3,364
34.1	60	2046.0	3,600
27.2	64	1740.8	4,096
20.4	70	1428.0	4,900
17.5	75	1312.5	5,625
14.6	82	1197.2	6,724
13.1	90	1179.0	8,100
11.2	100	1120.0	10,000
8.0	115	920.0	13,225
Σ = 404.8	Σ = 892	Σ = 20,619.8	Σ = 66,628.0
$\overline{y}$ = 28.91	$\overline{x}$ = 63.71		

Solution : Considérons d'abord l'expression de Greenshields

$$\overline{V_s} = V_f - \frac{V_f}{K_i} . K$$

En comparant cette expression avec la fonction de régression estimée y=a.x+b où :

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{y} - b\overline{x}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$a = 28.91 - 63.71b$$

$$b = \frac{20{,}619.8 - \frac{(892)(4048)}{14}}{66{,}628 - \frac{(892)^2}{14}} = -0.53$$

$$a = 28.91 - 63.71(-0.53) = 62.68$$

On voit bien que la vitesse $\overline{V_s}$ dans l'expression de Greenshields est représentée par y dans la fonction de régression estimée, la vitesse libre moyenne $\mathbf{V_f}$ (lorsque **q** est très faible) est représentée par « **a** », et la valeur de la vitesse libre moyenne Vf divisée par la densité de bourrage kj est représentée par « **-b** ». Nous obtenons donc :

$$\sum y_i = 404{,}8 \qquad \sum x_i = 404{,}8 \qquad \bar{y} = 28{,}91$$

$$\sum x_i y_i = 20619{,}8 \qquad \sum x_i^2 = 66{,}628 \qquad \bar{x} = 63{,}71$$

Puisque a=62,68 et b=-0,53 alors Vf=62,68 [km/h] d'une part d'autre part et Vf/Kj=0,53 alors Kj=62,68/0,53=118 [veh/km] ce qui donne :

$$\overline{\mathrm{V}}_{\mathrm{s}} = 62{,}68 - 0{,}53 \times \mathrm{K}$$

Since $a = 62.68$ and $b = -0.53$, then $u_f = 62.68$ mi/h, $u_f/k_j = 0.53$, and so $k_j = 118$ veh/mi, and $\overline{u}_s = 62.68 - 0.53k$.

Avec un R^2=0,95 (coefficient de régression) :

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}$$

où Yi est la valeur de la variable dépendante calculée à partir des équations de régression Y=a.x+b , Plus R^2 est proche de 1, meilleure est la régression.

En utilisant les valeurs estimées ci-dessus pour Vf et kj, nous pouvons déterminer le débit maximal à partir de :

$$q_{max} = \frac{K_j . V_f}{4} = \frac{118 \times 62{,}68}{4} = 1849\ [\frac{veh}{h}]$$

Pour quel valeur de vitesse moyenne spatiale **Vo** de débit sera au maximum revient à calculer la dériver :

$$\frac{d}{d\overline{V_s}}\left[\overline{V_s}^2\right] = \frac{d}{d\overline{V_s}}\left[V_f \times \overline{V_s} - \frac{V_f}{K_j} \times q\right]$$

$$2 \times \overline{V_s} = \left[V_f - \frac{V_f}{K_j} \times \frac{dq}{d\overline{V_s}}\right]$$

$$\frac{V_f}{K_j} \times \frac{dq}{d\overline{V_s}} = \left[V_f - 2 \times \overline{V_s}\right] \; alors \; \frac{dq}{d\overline{V_s}} = \left[\frac{K_j}{V_f} \times V_f - 2 \times \overline{V_s} \times \frac{K_j}{V_f}\right] \; d'où \; \frac{dq}{d\overline{V_s}} = \left[K_j - 2 \times \overline{V_s} \times \frac{K_j}{V_f}\right]$$

For maximum flow,

$$\frac{dq}{d\overline{u}_s} = 0 \qquad k_j = 2\overline{u}_s\frac{k_j}{u_f} \qquad u_o = \frac{u_f}{2} \qquad (6.16)$$

Thus, the space mean speed u_o at which the volume is maximum is equal to half the free mean speed.

Utilisation de l'équation Vo=Vf/2 ; nous obtenons aussi la vitesse à laquelle le débit est maximum, c'est-à-dire (62,68 / 2) = 31,3 [Km/h]

De même pour quel valeur de concentration **Ko** de débit sera au maximum revient à calculer la dériver :

$$\frac{dq}{dK} = \frac{d}{dK}\left(V_f \times K - \frac{V_f}{K_j} \times K^2\right) = 0 \rightarrow K_0 = \frac{K_j}{2}$$

For maximum flow,

$$\frac{dq}{dk} = 0$$

$$u_f = 2k\frac{u_f}{k_j} \qquad (6.17)$$

$$\frac{k_j}{2} = k_o$$

La densité **Ko** à laquelle le débit est maximal, est égale à (118/2) = 59 [véh./km].